

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合  $M = \{x | \sqrt{x} < 4\}$ ,  $N = \{x | 3x \geq 1\}$ , 则  $M \cap N =$

- A.  $\{x | 0 \leq x < 2\}$                       B.  $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 2\}$   
C.  $\{x | 3 \leq x < 16\}$                       D.  $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 16\}$

2. 若  $i(1-z) = 1$ , 则  $z + \bar{z} =$

- A. -2                      B. -1                      C. 1                      D. 2

3. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  在边  $AB$  上,  $BD = 2DA$ . 记  $\overrightarrow{CA} = m$ ,  $\overrightarrow{CD} = n$ , 则  $\overrightarrow{CB} =$

- A.  $3m - 2n$                       B.  $-2m + 3n$                       C.  $3m + 2n$                       D.  $2m + 3n$

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题, 其中一部分水蓄入某水库. 已知该水库水位为海拔 148.5 m 时, 相应水面的面积为 140.0 km<sup>2</sup>; 水位为海拔 157.5 m 时, 相应水面的面积为 180.0 km<sup>2</sup>. 将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台, 则该水库水位从海拔 148.5 m 上升到 157.5 m 时, 增加的水量约为 ( $\sqrt{7} \approx 2.65$ )

- A.  $1.0 \times 10^9 \text{ m}^3$                       B.  $1.2 \times 10^9 \text{ m}^3$                       C.  $1.4 \times 10^9 \text{ m}^3$                       D.  $1.6 \times 10^9 \text{ m}^3$

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 则这 2 个数互质的概率为

- A.  $\frac{1}{6}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{2}{3}$

6. 记函数  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) + b$  ( $\omega > 0$ ) 的最小正周期为  $T$ . 若  $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$ , 且  $y = f(x)$

的图像关于点  $(\frac{3\pi}{2}, 2)$  中心对称, 则  $f(\frac{\pi}{2}) =$

- A. 1                      B.  $\frac{3}{2}$                       C.  $\frac{5}{2}$                       D. 3

7. 设  $a = 0.1e^{0.1}$ ,  $b = \frac{1}{9}$ ,  $c = -\ln 0.9$ , 则

- A.  $a < b < c$               B.  $c < b < a$               C.  $c < a < b$               D.  $a < c < b$

8. 已知正四棱锥的侧棱长为  $l$ , 其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为  $36\pi$ , 且  $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$ , 则该正四棱锥体积的取值范围是

- A.  $[18, \frac{81}{4}]$               B.  $[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}]$               C.  $[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}]$               D.  $[18, 27]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ , 则

- A. 直线  $BC_1$  与  $DA_1$  所成的角为  $90^\circ$   
 B. 直线  $BC_1$  与  $CA_1$  所成的角为  $90^\circ$   
 C. 直线  $BC_1$  与平面  $BB_1D_1D$  所成的角为  $45^\circ$   
 D. 直线  $BC_1$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $45^\circ$

10. 已知函数  $f(x) = x^3 - x + 1$ , 则

- A.  $f(x)$  有两个极值点                      B.  $f(x)$  有三个零点  
 C. 点  $(0, 1)$  是曲线  $y = f(x)$  的对称中心                      D. 直线  $y = 2x$  是曲线  $y = f(x)$  的切线

11. 已知  $O$  为坐标原点, 点  $A(1, 1)$  在抛物线  $C: x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 上, 过点  $B(0, -1)$  的直线交  $C$  于  $P, Q$  两点, 则

- A.  $C$  的准线为  $y = -1$                       B. 直线  $AB$  与  $C$  相切  
 C.  $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$                       D.  $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

12. 已知函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  的定义域均为  $\mathbf{R}$ , 记  $g(x) = f'(x)$ . 若  $f(\frac{3}{2} - 2x)$ ,  $g(2+x)$  均为偶函数, 则

- A.  $f(0) = 0$               B.  $g(-\frac{1}{2}) = 0$               C.  $f(-1) = f(4)$               D.  $g(-1) = g(2)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.  $(1 - \frac{y}{x})(x+y)^4$  的展开式中  $x^2y^6$  的系数为\_\_\_\_\_ (用数字作答).
14. 写出与圆  $x^2 + y^2 = 1$  和  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$  都相切的一条直线的方程\_\_\_\_\_.
15. 若曲线  $y = (x+a)e^x$  有两条过坐标原点的切线，则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
16. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $C$  的上顶点为  $A$ , 两个焦点为  $F_1, F_2$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ . 过  $F_1$  且垂直于  $AF_2$  的直线与  $C$  交于  $D, E$  两点,  $|DE| = 6$ , 则  $\triangle ADE$  的周长是\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，已知  $a_1 = 1$ ,  $\{\frac{S_n}{a_n}\}$  是公差为  $\frac{1}{3}$  的等差数列.

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 证明:  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$ .

18. (12 分)

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$ .

(1) 若  $C = \frac{2\pi}{3}$ , 求  $B$ ;

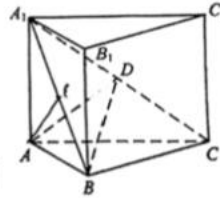
(2) 求  $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$  的最小值.

19. (12 分)

如图，直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的体积为 4,  $\triangle A_1BC$  的面积为  $2\sqrt{2}$ .

(1) 求  $A$  到平面  $A_1BC$  的距离;

(2) 设  $D$  为  $A_1C$  的中点,  $AA_1 = AB$ , 平面  $A_1BC \perp$  平面  $ABB_1A_1$ , 求二面角  $A - BD - C$  的正弦值.



20. (12分)

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系,在已患该疾病的病例中随机调查了100例(称为病例组),同时在未患该疾病的人群中随机调查了100人(称为对照组),得到如下数据:

	不够良好	良好	
病例组	40	60	
对照组	10	90	

(1) 能否有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人,  $A$  表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”,  $B$  表示事件“选到的人患有该疾病”,  $\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$  与  $\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$  的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标,记该指标为  $R$ .

(i) 证明:  $R = \frac{P(A|B) \cdot P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B) \cdot P(A|\bar{B})}$ ;

(ii) 利用该调查数据,给出  $P(A|B)$ ,  $P(A|\bar{B})$  的估计值,并利用(i)的结果给出  $R$  的估计值.

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,  $\frac{P(K^2 \geq k)}{k}$  | 0.050 0.010 0.001  
 | 3.841 6.635 10.828

21. (12分)

已知点  $A(2,1)$  在双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a > 1)$  上, 直线  $l$  交  $C$  于  $P, Q$  两点, 直线  $AP, AQ$  的斜率之和为0.

- 求  $l$  的斜率;
- 若  $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$ , 求  $\triangle PAQ$  的面积.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = e^x - ax$  和  $g(x) = ax - \ln x$  有相同的最小值.

- 求  $a$ ;
- 证明: 存在直线  $y = b$ , 其与两条曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.